江苏大学矩阵论考试样卷

一、　设 V 是实数域 R 上全体 2×2 的矩阵构成的线性空间（矩阵的加法和数量乘法）。（20 分）

1.　求 V 的维数，并写出 V 的一组基；

2.　在 V 上定义变换 $\mathscr{A}$：$\mathscr{A}(X)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}X$，X 是 2×2 的矩阵，证明：$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换。

3.　求 $\mathscr{A}$ 在所给基 $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

二、　设 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$（20 分）

1.　求 A 的特征多项式和全部特征根；

2.　求 A 的 Jordan 标准形。

3.　求 e^A，SinA。

三、　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$（10 分）

1.　求证：矩阵序列$\{A^k\}$收敛，并求当 $k\to\infty$ 时极限；

2.　证明：矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 绝对收敛。并写出其和矩阵。

四、 设$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ （20 分）

1．求$\|A\|_1, cond(A)_\infty, \rho(A)$；

2．问A可否进行 LU 分解；

3．求$A\otimes B$的秩，$(A\otimes B)^2$的所有特征根；

4．求B^-, B^+, B_r^-；

5．求 $f(A)=A^2+3A+2I$，和 Ln(A)的特征根。

6．求 A 的一个非平凡最大秩分解。

五、 已知$A=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\\2&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ （15 分）

求方程组$AX=B$，$AX=C$的解，并指出它们各是什么解？。

六、 证明题：（15 分）

1、证明 若$\|A\|<1$，则 I-A 为非奇异，且$\|(I-A)^-\|\le(I-\|A\|)^-$ 。

2、设λ为矩阵 A 的特征值，证明：$|\lambda|\le\sqrt[m]{\|A^m\|}$ 。

3、证明：$(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$。

4、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，

求 V 的一个正交变换 F 使得： $\begin{cases}F(\alpha_1)=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3\\F(\alpha_2)=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\end{cases}$。