博士研究生入学考试样卷

科目：数理统计

一．设（$X_1,X_2,\ldots\ldots X_n$）为 $N(\mu,2^2)$的一个样本，试求

（1） 样本容量 n，使 P｛$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\le 0.1$｝$\ge 0.95$;

（2） 样本容量 n,使 $E[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu)^2]\le 0.1$;

（3） 当 $\mu=0,n=10$ 时，求 P｛$\sum_{i=1}^{10}X_i^2>15.76$｝。

二．设总体 X 的概率密度为 $f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\ e^{-(x-\alpha)/\beta}$,$-\infty<\alpha\le x\le+\infty$, $\beta>0$

($X_1,X_2,\ldots\ldots X_n$)为来自此总体的样本。

（1） 当 α 已知时，用矩法求 β 的估计量；

（2） 求参数 β 的极大似然估计量。

三．设（$X_1,X_2,\ldots\ldots X_n$）为来自正态总体 N（μ_0,σ^2）的样本，其中参数 μ_0 已知。

证明：统计量 $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，而 $\sqrt{\theta}$ 不是 σ 的无偏估计。

四．为了在正常条件下检验一种杂交作物的两种新处理方案，在同一地区随机挑选 8 块地段。在各个试验地段，按两种方案种植作物，这 8 块地段的单位面积产量是：

一号方案：86，87，56，93，84，93，75，79

二号方案：80，79，58，91，77，82，74，66

假设这两种方案的产量都服从正态分布，试求这两种方案下平均产量之差的置信度为 90%的置信区间。

五．设对某正态总体 X～N（μ, σ^2）的均值 u 进行假设检验。

H_0：$\mu=\mu_0$, H_1：$\mu>\mu_0$,已知 $\sigma=300$,样本容量 n=25,取用样本均值 $\overline{X}$ 作检验统计量的 H_0 的接受域为$(-\infty,995)$。

（1） 若 $\mu_0=900$，求犯第一类错误的概率 α;

（2） 若 H_0 不正确，$\mu=\mu_1=1070$ 正确。问此时犯第二类错误的概率 β 是多少？

（3） 在（1）中，若要使犯第一类错误的概率减少到 α 的一半，问样本容量应增大到多少？

六. π的前 800 位小数的数字中，0，1，2，……，9 相应出现了 74，92，83，79，80，73，77，75，76，91 次。问能否认为这 10 个数字的出现服从等概率的均匀分布？（$\alpha=0.05$）

七. 假设 X 是一普通变量，Y 是一随机变量，且与 X 有形如 $Y=a+bx+e$ 的统计相关关系。在 X=0.25，0.37，……0.95，1.00 的条件下，独立地分别对 Y 进行观测，得如下数据：

X	0.25	0.37	0.44	0.55	0.60	0.62	0.68	0.70	0.73
Y	2.57	2.31	2.12	1.92	1.75	1.71	1.60	1.51	1.50

X	0.75	0.82	0.84	0.87	0.88	0.90	0.95	1.00
Y	1.41	1.33	1.31	1.25	1.20	1.19	1.15	1.00

(1) 求 Y 对 X 的回归方程；

(2) 求σ^2=DY 的无偏估计；

(3) 假设观测误差 $e_j(j=1,2,\cdots\cdots,17)$服从正态分布 $N(0,\ \sigma^2)$,

(a)对回归效果的显著性作 F 检验（$\alpha=0.01$）；

(b)对于任意给定的 x_0,求观测值 Y 的 0.95 预测区间。

附：临界值

$U_{0.975}=1.96$　$U_{0.95}=1.64$　$U_{0.943}=1.58$　$U_{0.8944}=1.25$　$U_{0.9713}=1.90$

$\chi^2_{0.05}(10)=3.94$　$\chi^2_{0.95}(9)=16.919$　$\chi^2_{0.95}(10)=18.307$

$T_{0.95}(14)=1.7613$　$T_{0.95}(15)=1.7531$　$T_{0.95}(16)=1.7459$

$T_{0.95}(17)=1.7396$

$F_{0.95}(7.7)=3.79$　$F_{0.975}(7.7)=4.99$　$F_{0.99}(1.15)=8.86$

$F_{0.99}(1.17)=8.40$